

Implementação de modelo matemático unidimensional de propagação de maré em estuário

Luís Vinícius Mundstock Porto de Souza

*Centro de Ciências Tecnológicas da Terra e do Mar; Universidade do Vale do Itajaí – Univali
vinicius@univali.br*

Franklin Misael Pacheco Tena

*Centro de Ciências Tecnológicas da Terra e do Mar; Universidade do Vale do Itajaí – Univali
franklinmpt@univali.br*

Carlos Augusto França Schettini

*Centro de Ciências Tecnológicas da Terra e do Mar; Universidade do Vale do Itajaí – Univali
guto@univali.br*

Cristina Ono Horita

*Centro de Ciências Tecnológicas da Terra e do Mar; Universidade do Vale do Itajaí – Univali
cristina@univali.br*

Rodrigo Campi Sperb

*Centro de Ciências Tecnológicas da Terra e do Mar; Universidade do Vale do Itajaí – Univali
rodrigosp erb@univali.br*

Resumo: Modelos hidrodinâmicos são ferramentas de grande valor no gerenciamento de estuários, permitindo desempenhar estudos complexos e detalhados com relação a problemas de transporte de sedimentos, circulação e qualidade d'água. No presente trabalho, objetivou-se a implementação de uma ferramenta computacional para o estudo da propagação da maré em estuários, utilizando para isto o método de diferenças finitas em esquema explícito, proposto por Koutitas (1988). Implementado na linguagem computacional do Scilab, o esquema citado passou por testes numéricos para validar o modelo, os quais foram a propagação de maré num canal de seção retangular com profundidade constante e largura variando linearmente, e propagação de maré em canal de seção transversal retangular constante. Comparando neste teste as respostas obtidas a partir de sua solução analítica. Os resultados mostram que o código Scilab do esquema de Koutitas (1988) é eficiente na solução de problemas associados a geometrias simples, mostrando pequeno erro relativo, principalmente nas seções internas.

Palavras-chave: Modelo Numérico; Propagação de Maré; Circulação em Estuário.

1. Introdução

Os sistemas fluviais e estuarinos foram, desde o início da formação da sociedade humana, a porta para a colonização e o desenvolvimento econômico, tendo sido a via preferencial de transporte de pessoas e bens entre o interior do continente e a zona costeira (WETTSTEIN, 1992).

Durante dezenas de séculos, os rios e estuários foram utilizados na obtenção de alimento, tanto na forma direta, como no caso da atividade pesqueira, quanto indiretamente na irrigação de campos para a agricultura. Mas com o advento da industrialização e a intensificação da atividade econômica, houve demanda pela criação de estruturas e a modificação destes sistemas, gerando problemas na qualidade da água, conforme discutido por Tucci (1998). Problemas estes que afetam diretamente a flora,

fauna e a própria sociedade humana, a qual cresce em ritmo acelerado nos países em processo de desenvolvimento e aumenta sua demanda em escala exponencial (AZEVEDO, 2000).

Esta demanda de recursos e o uso incorreto destes vêm degradando os cursos d'água, gerando conflitos e exigindo a gestão d'água e demais recursos (BRAGA *et al.*, 2005). Para auxiliar nesta tarefa, a utilização de modelos numéricos pode agregar muitas vantagens, pois integra conhecimentos físicos, químicos e biológicos. Seu emprego cresce nas mais diferentes áreas das engenharias, principalmente na Engenharia Hidráulica Marítima e Ambiental. Dentre os diferentes tipos de modelos e métodos existentes, foi escolhido para a implementação neste trabalho um Modelo Unidimensional de Propagação de Maré em Estuários, pelo Método das Diferenças Finitas e por esquema matemático explícito.

2. Materiais e Métodos

Através da linguagem do ambiente computacional *Scilab*, as equações governantes e as condições de contorno de cada modelo foram implementadas na forma de funções, as quais são carregadas por códigos executáveis em conjunto com os dados iniciais.

2.1 Metodologia

Utilização de solução numérica para canais de geometria simples e de características conhecidas para a comparação dos valores obtidos pela solução numérica com a solução analítica deste modelo.

2.1.1 Solução analítica

A solução analítica para canais de profundidade constante utilizada neste trabalho foi publicada por Lynch e Gray (1978), onde a elevação do nível da água e velocidade são descritas respectivamente por:

$$\zeta_n^t = \text{Re} \left\{ \zeta_0 e^{i\omega t} \frac{\cos[\beta(n-n_1)]}{\cos[\beta(n_2-n_1)]} \right\}$$

$$u_n^t = \text{Re} \left\{ \frac{-i\omega\zeta_0}{\beta H_0} e^{i\omega t} \frac{\text{sen}[\beta(n-n_1)]}{\cos[\beta(n_2-n_1)]} \right\}$$

sendo:

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega\tau i}{gH_0}}$$

2.1.2 Solução numérica

A solução numérica deste esquema baseia-se no Método de Diferenças Finitas (MDF) de forma explícita, onde descarga (Q) e elevação do nível (ζ) estão em função do espaço (n) e tempo (t). Segue abaixo as equações, na forma do MDF.

$$\zeta_n^{t+\frac{1}{2}} = \zeta_n^{t-\frac{1}{2}} - 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{(Q_{n+1}^t - Q_n^t)}{(B_n - B_{n+1})} \right]$$

$$Q_n^{t+1} = Q_n^t - \frac{1}{2\Delta x} \left[\frac{(Q_{n+1}^t)^2}{A_{n+1}} - \frac{(Q_{n-1}^t)^2}{A_{n-1}} \right] - gA_n \left\{ \frac{\left(\zeta_n^{t+\frac{1}{2}} - \zeta_n^{t-\frac{1}{2}} \right)}{\Delta x} - \left[\frac{(Q_n^t)^2}{C^2 R_n} + \frac{(|u_{n+1}^t| - |u_{n-1}^t|)^2}{4g\Delta x} \right] + \text{sign}(u_n^t) \right\}$$

Onde (B) é largura da superfície da água, (C) o Coeficiente de Chézy, (R) o raio hidráulico (R) e (u) a velocidade média na seção transversal, sendo o penúltimo termo da equação anterior válido somente quando $u_{n+1} < u_{n-1}$.

2.2 Condições de contorno

Na primeira seção (desembocadura), a entrada da onda no estuário em função do tempo, se dá pela equação 2.12, sendo no instante zero numericamente igual à amplitude ($\zeta_1 = \zeta_0$).

$$\zeta_1^t = \zeta_0 \text{sen} \left[t \frac{2\pi\Delta t}{T} \right]$$

Ao calcular a última seção (cabeceira), podem-se considerar duas diferentes formas de reflexão; a primeira com a reflexão total expressa por $Q=0$ e a segunda com transmissão livre de energia, representada pela equação 2.13.

$$Q_{\text{último}}^{t+1} = \zeta_{\text{último}}^{t+\frac{1}{2}} - \sqrt{gB_{\text{último}}A_{\text{último}}}$$

2.3 Dados iniciais

Para utilizar este modelo, é necessário conhecer: amplitude da onda entrando no canal (ζ_1), Coeficiente de Chézy (C), elevações do nível da água no instante zero (ζ^0), largura (B_n), período da onda (T) e profundidade inicial (H^0). Além destes dados característicos do estuário a ser estudado, é necessário definir os passos de tempo (Δt) e espaço (Δx) mínimos para que se mantenha a estabilidade do modelo, dada pela equação:

$$\frac{\Delta t \sqrt{gH_n^0}}{\sqrt{2\Delta x}} < 1$$

2.4 Verificação do esquema numérico

A verificação do respectivo programa executável foi desempenhada através da comparação dos resultados do modelo numérico com as fornecidas pelas soluções analíticas existentes para fenômenos de natureza simples. No caso da propagação de onda de maré, nas condições descritas no trabalho, as equações analíticas são programadas e comparadas com as saídas do modelo (KAMPHUIS, 2000; Menezes, 1978). Esta etapa foi dividida em:

- Teste Numérico 1: propagação de onda de maré em um canal retangular com profundidade constante e largura variando linearmente, e
- Teste Numérico 2: propagação de onda de maré em um canal retangular com seção transversal constante.

3. Testes numéricos

3.1 Propagação de maré em um canal de seção transversal constante

O caso 1 é um exemplo de canal com seção transversal constante retirado do trabalho *An efficient semi-implicit fine element scheme for two-dimensional tidal flow computations*, publicado por Chen *et al.* (1989). O canal possui profundidade constante de 9,144m, 3.962,4m de largura com um comprimento total de 871,728Km, sendo dividido em 22 seções de 39,624Km (Δx). A entrada da onda na desembocadura provoca a variação senoidal no nível da superfície livre da água a montante, de período (T) 12h e amplitude (ζ_0) 9,144cm. A solução analítica deste problema foi desenvolvida por Lynch e Grant (1988) e foi apresentada no item 2.1.1. Considerou-se uma livre transmissão de energia a jusante como condição de contorno e o Coeficiente de Chézy (C) 31 e Coeficiente de Fricção (τ) = $5 \cdot 10^{-5}$, buscou-se então definir através do atendimento da Condição de Courant um Δt mínimo para manter a estabilidade do modelo ($\Delta t < 29,722925s$).

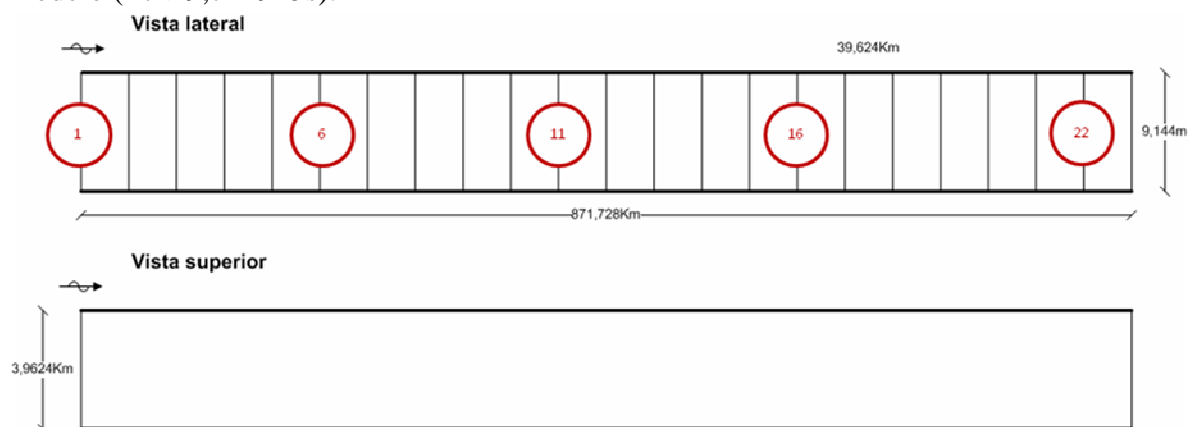


Figura 1: Representação da vista lateral e superior do canal (Caso 2).

3.2 Propagação de maré em um canal de profundidade constante e largura variando linearmente

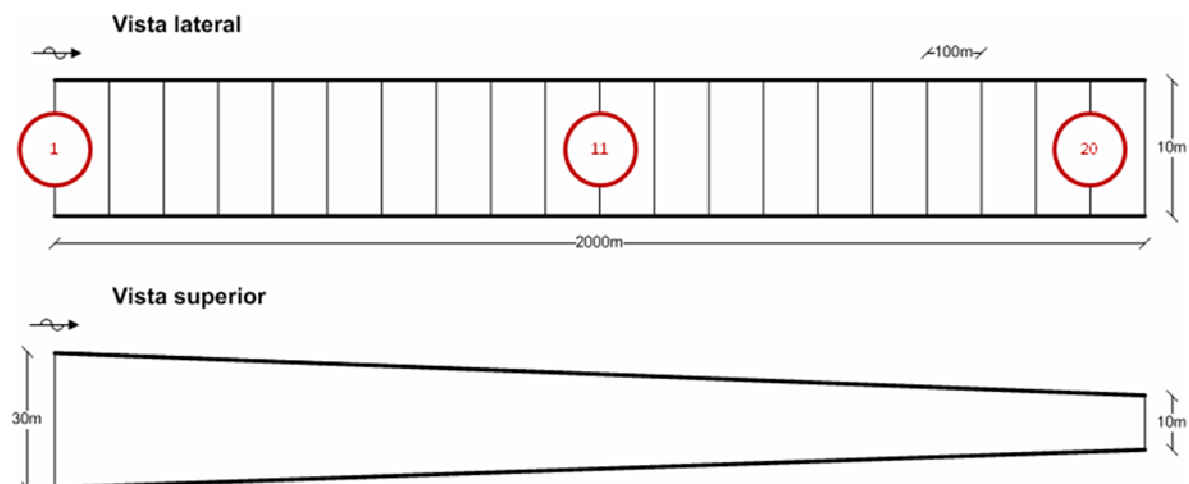


Figura 2: Representação da vista lateral e superior do canal (Caso 2).

A segunda aplicação do modelo de Koutitas (1988), neste trabalho, foi em um canal de profundidade (H) constante de 10m e largura (B) variando linearmente de 30 (desembocadura) a 10 metros (cabeceira), com 2000m de comprimento dividido em 20 seções transversais, separadas entre si por uma distância de 100m (Δx). A entrada de

uma onda com período (T) 500s e amplitude (ζ_0) 1m na desembocadura provoca a variação senoidal no nível da superfície livre da água a montante (cabeceira).

4. Resultados

4.1 Teste Numérico 1.

Aos compararmos a solução analítica com as duas versões do modelo encontraram-se mínimas variações na elevação e velocidade, conforme visto nas tabelas e gráficos adiante. Na elevação do nível da água em relação às seções, o modelo de Koutitas com τ obteve valores mais próximos à solução analítica que os encontrados utilizando Chézy, tendo maior diferença as 27 e 33 horas. Entretanto quando a elevação está em função do tempo, Chézy gera menores erros absolutos que τ , tendo as maiores diferenças de erro nas elevações nas seções 6 e 16.

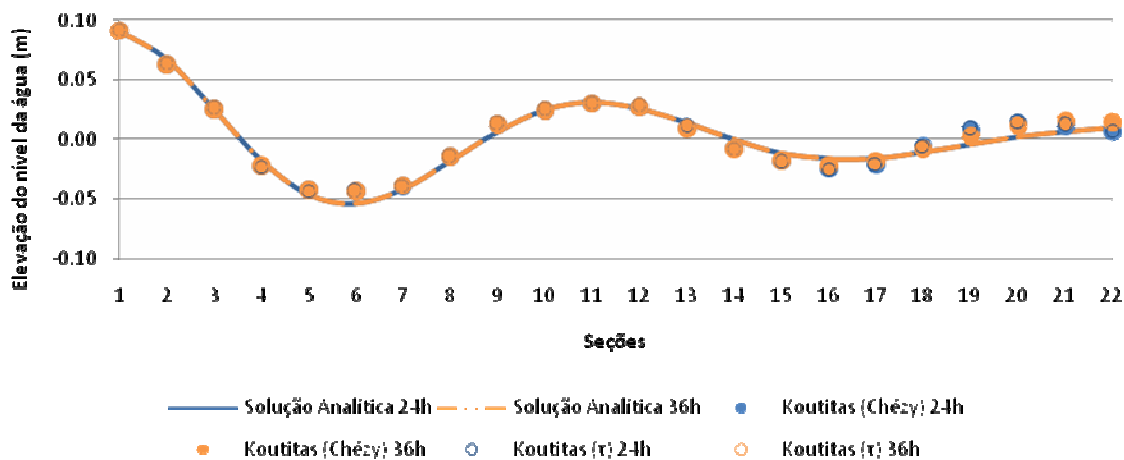


Figura 3: Representação gráfica da elevação do nível da água nas seções, às 24 e 36 horas.

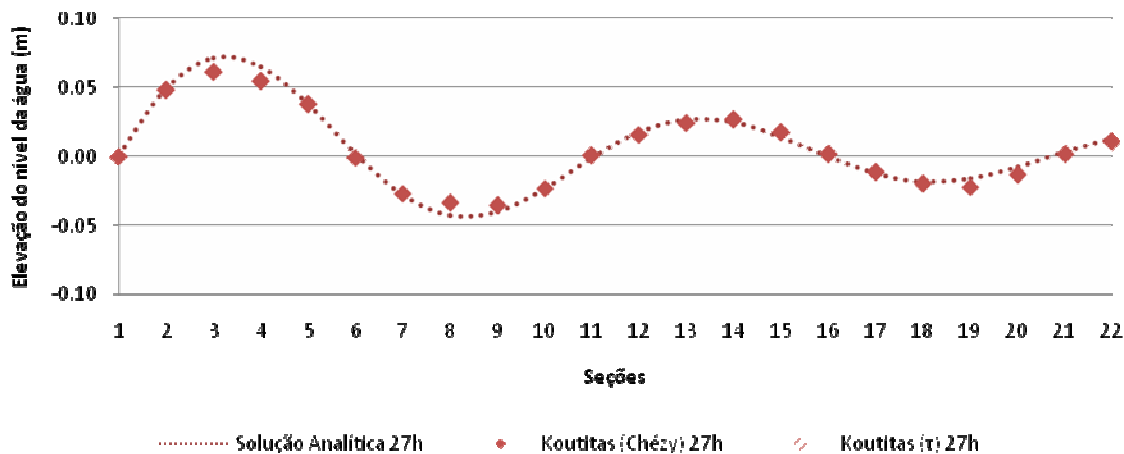


Figura 4: Representação gráfica da elevação do nível da água nas seções, às 27 horas.

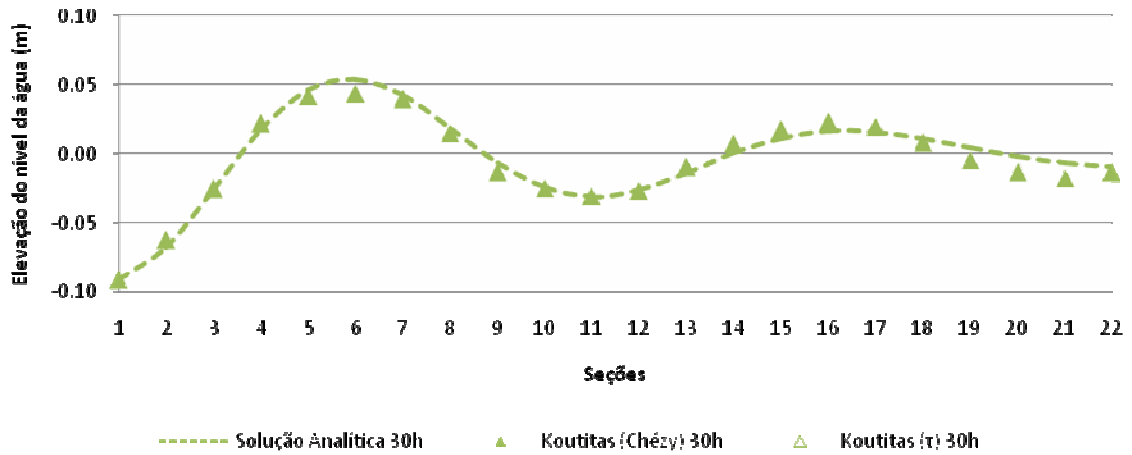


Figura 5: Representação gráfica da elevação do nível da água nas seções, às 30 horas.

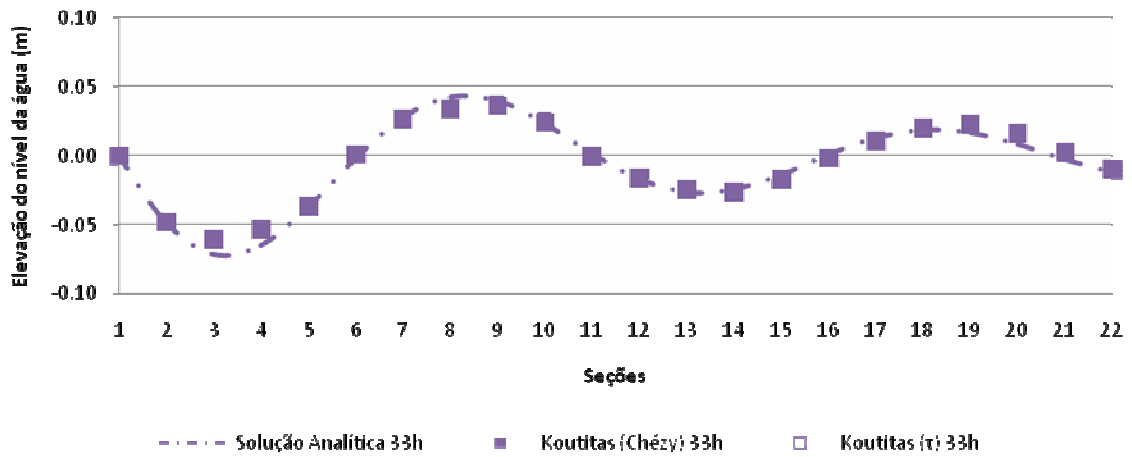


Figura 6: Representação gráfica da elevação do nível da água nas seções, às 30 horas.

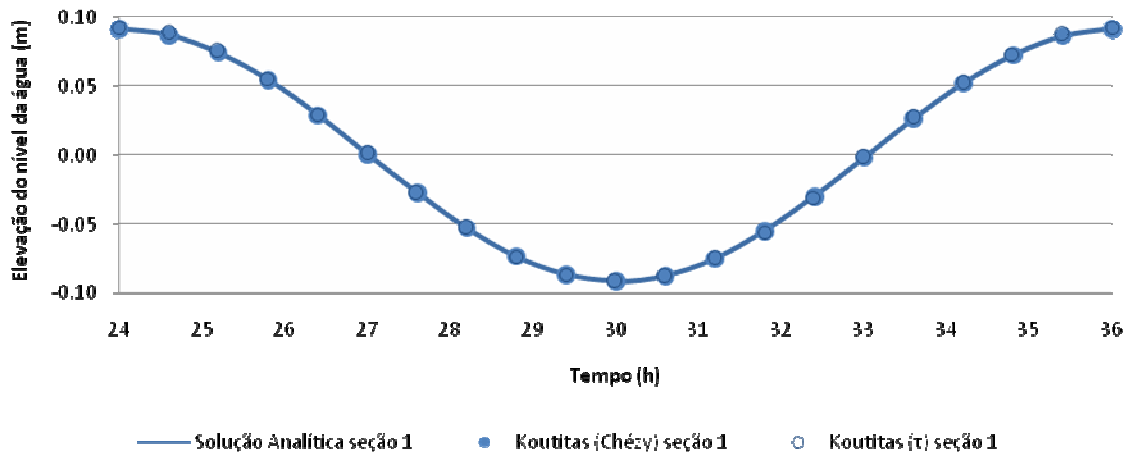


Figura 7: Representação gráfica da elevação na seção 1.

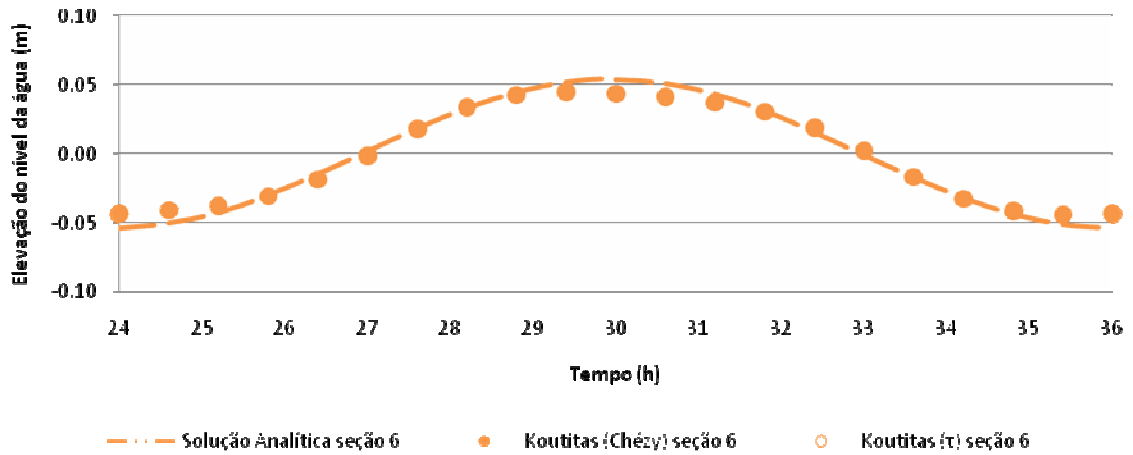


Figura 8: Representação gráfica da elevação na seção 6.

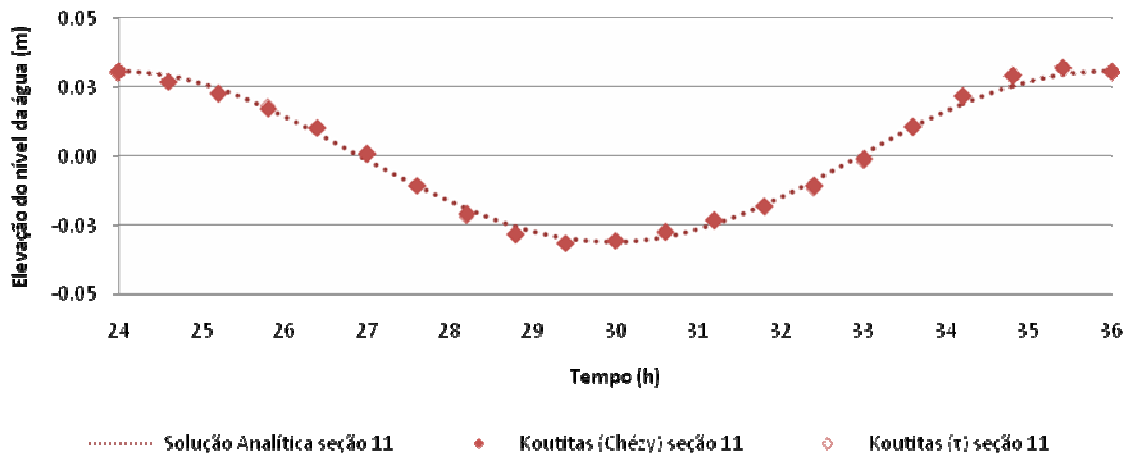


Figura 9: Representação gráfica da elevação na seção 11.

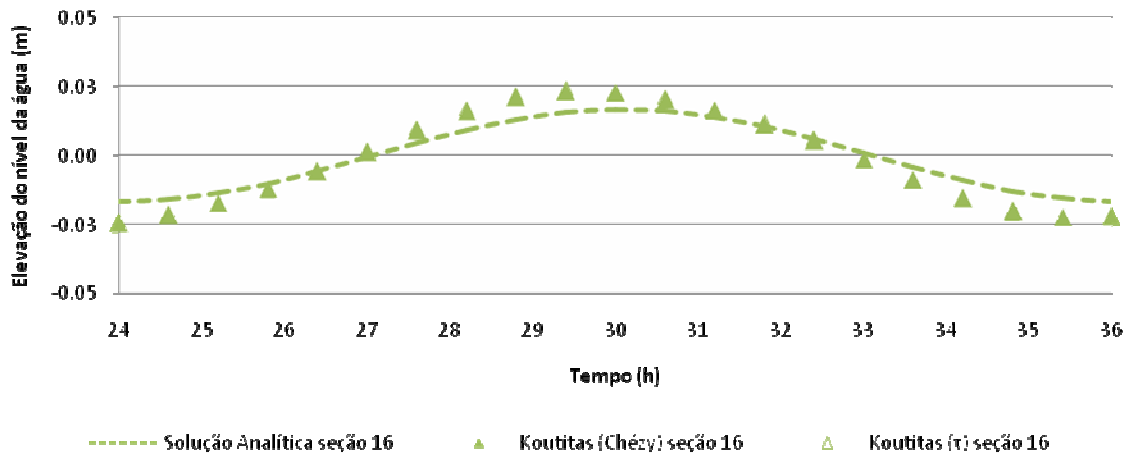


Figura 10: Representação gráfica da elevação na seção 16.

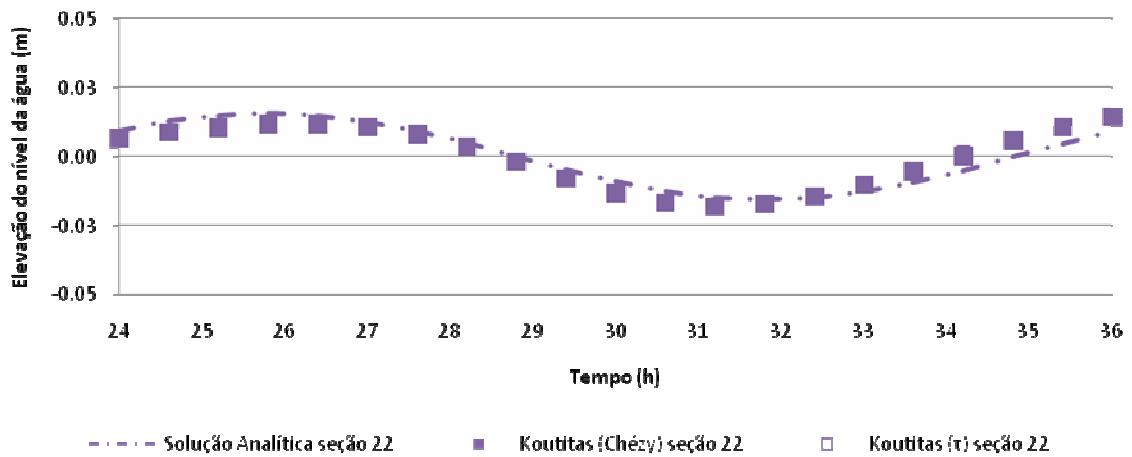


Figura 11: Representação gráfica da elevação na seção 22.

4.2 Teste Numérico 2.

Na Figura 12 é apresentada graficamente esta comparação, onde a elevação do nível da água nas seções, em diferentes frações do período de onda, mostrou-se muito próxima. Por esta razão foi calculado o erro relativo entre os dados do *Scilab* e os valores de referência, visto na Figura 13 e Tabela 1.

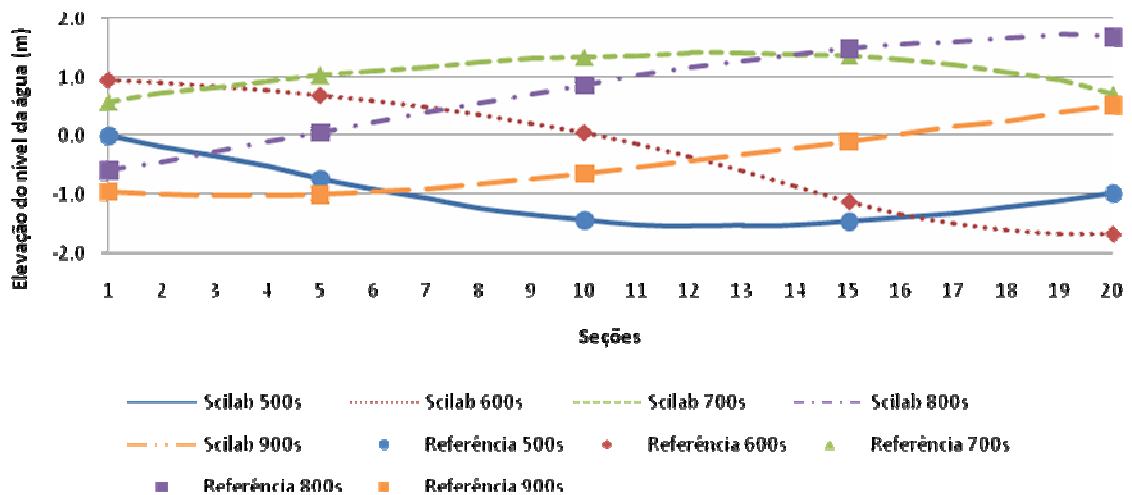


Figura 12: Gráfico da elevação do nível em diferentes tempos, entre as versões Scilab e o BASIC.

Da mesma forma que a elevação, a velocidade mostra um comportamento periódico, que vai se estabilizando até o final do segundo período de onda (Figura 13Figura 13).

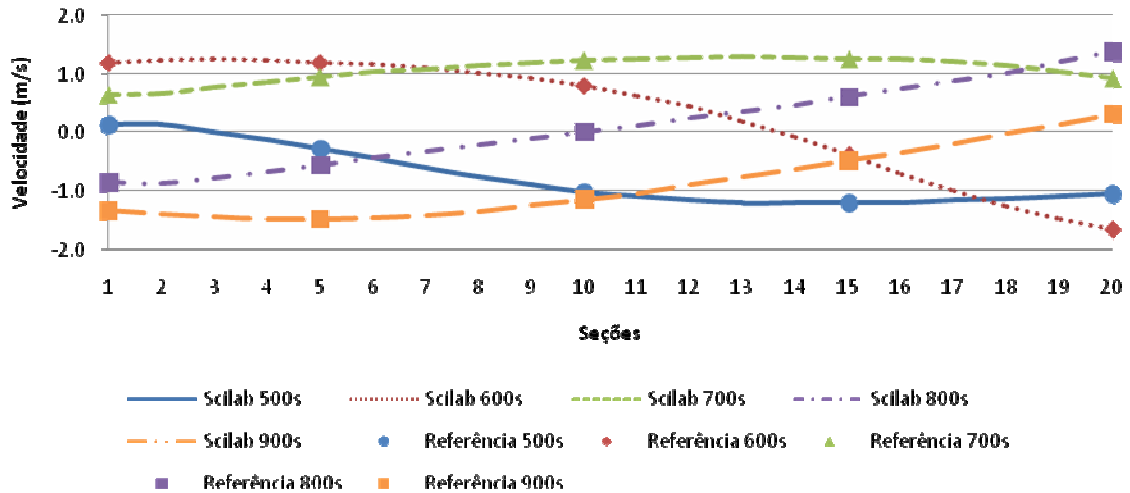


Figura 13: Gráfico comparativo da velocidade em diferentes tempos, entre as versões Scilab e o BASIC.

Tabela 1: Erro relativo da elevação e da velocidade nas seções 1, 11 e 20, entre as versões Scilab e o os valores de referência.

| Tempo (s) | Erro relativo na elevação da água | | | Erro relativo na velocidade | | |
|-----------|-----------------------------------|----------|----------|-----------------------------|----------|----------|
| | Seção 1 | Seção 11 | Seção 20 | Seção 1 | Seção 11 | Seção 20 |
| 500 | 1,260% | 0,043% | 0,028% | 0,014% | 0,062% | 0,032% |
| 600 | 0,060% | 0,217% | 0,020% | 0,007% | 0,029% | 0,018% |
| 700 | 0,154% | 0,060% | 0,107% | 0,059% | 0,025% | 0,054% |
| 800 | 0,067% | 0,087% | 0,004% | 0,020% | 0,972% | 0,054% |
| 900 | 0,083% | 0,085% | 0,213% | 0,070% | 0,020% | 0,388% |
| 1000 | 1,260% | 0,059% | 0,092% | 0,041% | 0,054% | 0,064% |

Ao analisarmos a Figura 14 é possível notar um aumento do nível da água conforme se afasta da desembocadura devido à entrada de água doce na cabeceira e a diminuição da largura de 30 para 10 metros.

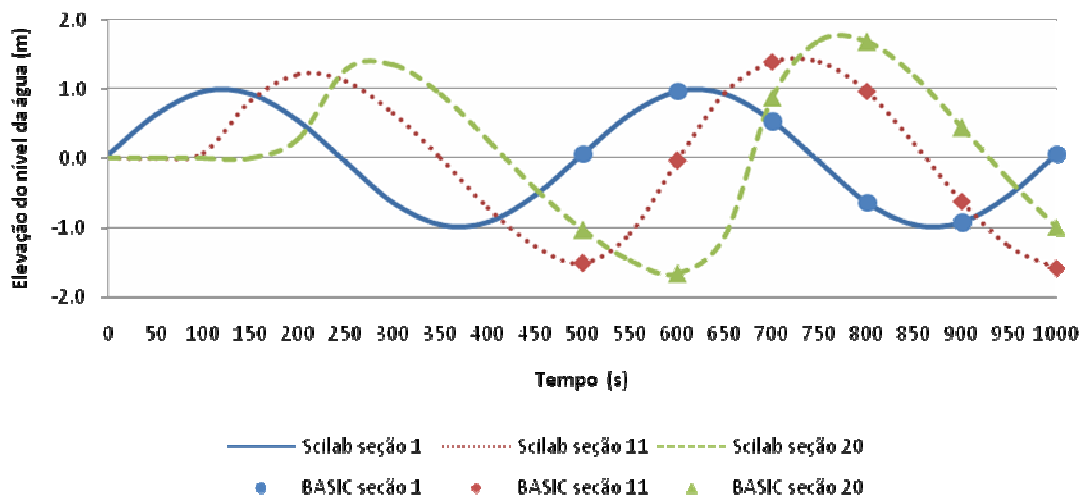


Figura 14: Gráfico comparativo da elevação nas seções 1, 11 e 20 em um período de tempo, entre as versões Scilab e o BASIC.

Igualmente a elevação, a velocidade sofre influência do estreitamento e da água doce à montante, mas numa magnitude muito menor, conforme representado na Figura 15.

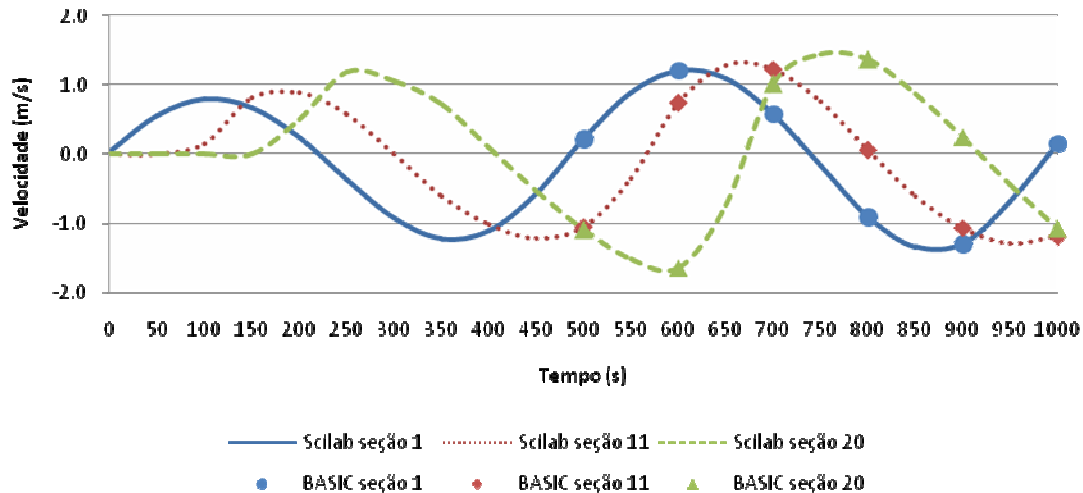


Figura 15: Gráfico comparativo da velocidade nas seções 1, 11 e 20 em um período de tempo, entre as versões Scilab e o BASIC.

4. Considerações Finais

O emprego de modelos numéricos hidrodinâmicos tem se tornado obrigatório no estudo e gestão dos corpos d'água, fornecendo ao profissional uma ferramenta capaz de simular cenários hipotéticos antes que uma ação seja tomada. Os resultados mostram que o código *Scilab* do esquema de Koutitas (1988) é eficiente na solução de problemas associados a geometrias simples, mostrando pequeno erro relativo, principalmente nas seções internas.

Referências

- AZEVEDO, L. G. T. *et al.* Integration of Water Quantity and Quality in Strategic River Basin Planning. *Journal of Water Resources Planning and Management*, Vol. 126, N^o. 2, Março/Abril, 2000, 85-97p.
- BRAGA, B. *et al.* Introdução à engenharia ambiental. 2d. São Paulo: Prentice-hall, 2005, 336p
- KAMPHUIS, J. W. Introduction to Coastal Engineering and Management. v.16, World Scientific, Singapore, 2000, 437 p.
- KOUTITAS, C. G. Mathematical models in coastal engineering. Londres, Pentecht Press. 1988, 156p.
- LYNCH, D. R.; GRAY, W. G. Analytical solution for computer flow model testing, ASCE, J. Hyd Div, v.106, NY10, 1978, 1409-1428p.
- MENEZES, C. J. M. B. One dimensional tidal propagation model for the Santos Estuary – Brazil. Dissertação (Mestrado em Engenharia Marítima Civil). Victoria University of Manchester, Manchester, UK, 1978, 58p.
- TUCCI, C.E.M. Modelos hidrológicos. Porto Alegre: Ed. Universidade, UFRGS, ABRH, 1998. 669p.